I- suites numériques

	Suites arithmétiques	Suites géométriques
définition	$(\exists r \in \mathbb{R})\quad \forall n \in \mathbb{N} : u_{n+1} = u_n + r$ r s'appelle la raison de (u_n)	$(\exists q \in \mathbb{R}^*)\quad \forall n \in \mathbb{N} : u_{n+1} = q \times u_n$ q s'appelle la raison de (u_n)
Expression explicite de u_n	$\forall n \in \mathbb{N}, \forall p \in \mathbb{N}: u_n = u_p + (n-p) \times r$ Si le premier terme de (u_n) est u_0 alors : $\forall n \in \mathbb{N} \quad : \quad u_n = u_0 + n \times r$	$\forall n \in \mathbb{N}, \forall p \in \mathbb{N}: \quad u_n = u_p \times q^{n-p}$ Si le premier terme de (u_n) est u_0 alors : $\forall n \in \mathbb{N} \quad : \quad u_n = u_0 \times q^n$
Somme de termes consécutifs	$S_n = u_p + u_{p+1} + u_{p+2} + \dots + u_n$ $S_n = \dfrac{u_p + u_n}{2} \times (n-p+1)$	$S_n = u_p + u_{p+1} + u_{p+2} + \dots + u_n$ $S_n = u_p \times \frac{1-q^{n-p+1}}{1-q} \qquad si\ q \neq 1$ $S_n = (n-p+1) \times u_0 \quad si \quad q = 1$
Propriété de la moyenne	$u_n = \dfrac{u_{n-1} + u_{n+1}}{2}$ Ou $u_{n-1} + u_{n+1} = 2 \times u_n$	$u_n = \sqrt{u_{n-1} \times u_{n+1}}$ Ou $u_{n-1} \times u_{n+1} = {u_n}^2$

NB : Le nombre de termes de la somme $(u_p + u_{p+1} + \dots + u_n)$ est : $(n-p+1)$

Monotonie d'une suite (u_n)

(u_n) croissante $\Leftrightarrow \forall (n;p) \in \mathbb{N}^2 : n < p \Rightarrow u_n \leq u_p$ $\Leftrightarrow \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad : \quad u_n \leq u_{n+1}$	(u_n) strictement croissante $\Leftrightarrow \quad \forall (n;p) \in \mathbb{N}^2 : n < p \Rightarrow u_n < u_p$ $\Leftrightarrow \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad : \quad u_n < u_{n+1}$
(u_n) décroissante $\Leftrightarrow \forall (n;p) \in \mathbb{N}^2 : n < p \Rightarrow u_n \geq u_p$ $\Leftrightarrow \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad : \quad u_n \geq u_{n+1}$	(u_n) strictement décroissante $\Leftrightarrow \quad \forall (n;p) \in \mathbb{N}^2 : n < p \Rightarrow u_n > u_p$ $\Leftrightarrow \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad : \quad u_n > u_{n+1}$

NB : (u_n) est dite constante *si et seulement si* $\forall n \in \mathbb{N} \quad : \quad u_n = u_{n+1}$

Suite majorée -suite minorée –suite bornée :

(u_n) majorée	$(\exists M \in \mathbb{R}) \quad (\ \forall n \in \mathbb{N} \quad : \quad u_n \leq M\ )$
(u_n) minorée	$(\exists k \in \mathbb{R}) \quad (\forall n \in \mathbb{N} \quad : \quad u_n \geq k\ )$
(u_n) bornée	$\exists (k;M) \in \mathbb{R}^2 \quad (\forall n \in \mathbb{N} \quad : \quad k \leq u_n \leq M\ )$

Raisonnement par Récurrence :

Soit $P(n)$ une propriété de variable n entier naturel et soit $n_0 \in \mathbb{N}$.

démontrer par récurrence que : $\forall n \geq n_0 \ : P(n)\ est\ vraie$ se fait en 2 étapes :

- ***Initialisation*** : vérifier que : $P(n_0)\ est\ vraie$
- ***Hérédité*** : on démontre que : $\forall n \geq n_0 \quad on\ a \ : \ P(n)\ vraie \Rightarrow P(n+1)\ vraie$

II – Limite d'une suite numérique

Définition :

Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l \in \mathbb{R}$ **alors** (u_n) **est dite suite convergente ou converge vers** l**.**

$$(\forall\varepsilon \succ 0)(\exists p\in\mathbb{N}):(\forall n\in\mathbb{N}: n\geq p \Rightarrow |u_n - l| \prec \varepsilon)$$

Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \pm\infty$ **alors** (u_n) **est dite suite divergente .**

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty \iff (\forall A\succ 0)(\exists p\in\mathbb{N}):(\forall n\in\mathbb{N}: n\geq p\Rightarrow u_n \succ A)$$

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty \iff \lim_{n\to+\infty} -u_n = +\infty$$

Limites de suites de référence :

Expression de u_n	$u_n = \frac{1}{n}$	$u_n = \frac{1}{n^k}$	$u_n = \frac{1}{\sqrt[k]{n}}$	$u_n = n$	$u_n = n^k$	$u_n = \sqrt[k]{n}$
$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n =$	**0**	**0**	**0**	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$

Limites de la suite géométrique (u_n) telle que : $u_n = q^n$

Valeur de q :	Si $q > 1$	Si $q = 1$	Si $-1 < q < 1$	Si $q \leq -1$
$\lim\limits_{n\to+\infty} q^n =$	$+\infty$	1	0	n'existe pas

Critéres de convergence monotone:

Toute suite croissante et non-majorée diverge vers $+\infty$.
Toute suite croissante et majorée est convergente .

Toute suite décroissante et non-minorée diverge vers $-\infty$.
Toute suite décroissante et minorée est convergente .

Citéres de comparaisons pour suites divergentes:

Si à partir d'un rang on a : $u_n \leq v_n$ **et** $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$ **alors :** $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$

Si à partir d'un rang on a : $u_n \geq v_n$ **et** $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$ **alors :** $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

Citéres de comparaisons pour suites convergentes:

Si à partir d'un rang on a : $w_n \leq u_n \leq v_n$ **et** $\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = l \\ \lim\limits_{n\to+\infty} w_n = l \end{cases}$ **alors :** $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$

Si à partir d'un rang on a : $|u_n - l| \leq v_n$ *et* $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$ **alors :** $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$

Ordre et limites :

Soit $a\in\mathbb{R}$ **et** $p\in\mathbb{N}$

$$Si \quad \left(\forall n\geq p: u_n \prec a \quad et \quad \lim_{n\to+\infty} u_n = l\right) \quad Alors \quad l\leq a$$

$$Si \quad \left(\forall n\geq p: u_n \succ a \quad et \quad \lim_{n\to+\infty} u_n = l\right) \quad Alors \quad l\geq a$$

Si (u_n) est croissante et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$ alors (u_n) est majorée par l ç.à.d : $\forall n \in \mathbb{N} \quad : \quad u_n \leq l$

Si (u_n) est décroissante et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$ alors (u_n) est minorée par l ç.à.d : $\forall n \in \mathbb{N} \quad : \quad u_n \geq l$

Limite de suite de type : $u_{n+1} = f(u_n)$

Soit f une fonction continue sur un intervalle I telle que : $f(I)\subset I$
Soit (u_n) la suite telle que : $u_{n+1} = f(u_n)$ et $u_0 \in I$.
Si (u_n) est convergente Alors sa limite l est solution de l' équation : $f(x) = x$

Suites adjacentes

(x_n)**et** (y_n) **sont dites adjacentes si l'une est croissante et l'autre décroissante et** $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n - y_n = 0$.

Elles sont convergentes vers la même limite l **; c'est-à-dire** $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \lim\limits_{n\to+\infty} y_n = l$ **.**