1 1) montrer que $\left(\forall k \in \mathbb{N}^*\right)$ $\frac{1}{k+1} \leq \ln\left(k+1\right) - \ln k \leq \frac{1}{k}$

2) on considère la suite $\left(U_n\right)_n$ définie par $\left(\forall n \in \mathbb{N}^*\right)$ $U_n = \sum_{k=n}^{n=2n} \frac{1}{k}$

a) montrer que $\left(\forall n \in \mathbb{N}^*\right)$ $U_n - \frac{1}{n} \leq \ln 2 \leq U_n - \frac{1}{2n}$

b) déduire que $\left(U_n\right)_n$ est convergente et déterminer sa limite

3) on pose $x_n = \left(\sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k}\right) - \ln n$ et $y_n = \left(\sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k}\right) - \ln\left(n+1\right)$ pour tout entier naturel non nul n

a) montrer que $\left(\forall n \in \mathbb{N}^*\right)$ $y_n \leq x_n$

b) montrer que $\left(x_n\right)_n$ et $\left(y_n\right)_n$ sont adjacentes

2 On considère la fonction f définie sur $\left]0,+\infty\right[$ par : $f\left(x\right) = \ln x - 2\arctan x$

1) calculer les limites $\lim_{x\to+\infty} f\left(x\right)$ et $\lim_{\substack{x\to 0 \\ x>0}} f\left(x\right)$

2) calculer la dérivée $f'\left(x\right)$ et étudier le sens de variation de f puis dresser le tableau des variations

3) a) prouver que l'équation $f\left(x\right) = 2n$ admet une unique solution notée a_n

b) vérifier que $\left(\forall n \in \mathbb{N}\right)$ $e^{2n} < a_n$ et déterminer $\lim_{n\to+\infty} a_n$

4) montrer que $\left(\forall n \in \mathbb{N}\right)$ $\ln\left(\frac{a_n}{e^{2n}}\right) = 2\arctan\left(a_n\right)$ en déduire que $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{e^{2n}} = e^{\pi}$

5) montrer que $\left(\forall n \in \mathbb{N}\right)$ $\ln\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}\right) = 2\left(\arctan\left(a_n\right) - \arctan\left(a_{n+1}\right) - 1\right)$ en déduire $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}}$

3 Soit a un réel de $\mathbb{R}^{+*}$.

on considère la suite $U_n = \sum_{k=0}^{k=n} \frac{1}{a+k}$ et la fonction $f\left(x\right) = \ln\left(x+a\right)$

1) montrer que $\left(\forall k \in \left\{0,1,\dots,n-1\right\}\right)$ $\frac{1}{a+k+1} \leq f\left(k+1\right) - f\left(k\right) \leq \frac{1}{a+k}$

2) prouver que $\left(\forall n \in \mathbb{N}^*\right)$ $\ln\left|1+\frac{n}{a}\right| \leq U_n \leq \frac{1}{a} + \ln\left|1+\frac{n}{a}\right|$

3) déterminer les limites $\lim_{n\to+\infty} U_n$ et $\lim_{n\to+\infty} \frac{U_n}{n}$

4 On considère la fonction f définie sur $\left[0,+\infty\right[$ par : $f\left(x\right) = \frac{x^2}{x^2+1} + \ln\left(x+1\right)$

1) a) montrer que f est strictement croissante sur $\left[0,+\infty\right[$

b) calculer $\lim_{x\to+\infty} f\left(x\right)$ *et* $\lim_{x\to+\infty} \frac{f\left(x\right)}{x}$ donner une interprétation géométrique du résultats

2) tracer la courbe de la fonction f

3) soit n un entier de $\mathbb{N}^*$. on considère l'équation $\left(E_n\right)$ $nf\left(x\right) = 1$

a) montrer que $\left(E_n\right)$ admet une unique solution x_n

b) montrer que f admet une réciproque f^{-1} et dresser le tableau des variations de f^{-1}

c) déduire la monotonie de la suite $(x_n)_n$ puis déterminer sa limite

4) calculer $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}$ en déduire $\lim_{n\to+\infty} nx_n$

5

Soit n un entier tel que $n \geq 2$.

on considère la fonction f_n définie sur $]0,+\infty[$ par : $f_n(x)=\frac{\ln x}{n}-\frac{1}{x^n}$

1) étudier le sens de variation de f_n et donner le tableau des variations

2) montrer que l'équation $f_n(x)=0$ admet une unique solution u_n

3) a) prouver que $(\forall n\geq 2)$ $\sqrt[n]{e}<u_n$

b) montrer que $(\forall x\in\mathbb{R})$ $e^x\geq x+1$ en déduire que $(\forall n\geq 2)$ $u_n<e$

4) a) prouver que $f_{n+1}(u_n)=\frac{\ln u_n}{(n+1)u_n}\left(u_n-1-\frac{1}{n}\right)$ et déduire que $f_{n+1}(u_n)>0$

b) montrer que $(u_n)_n$ est décroissante et convergente

5) on pose $V_n=\ln u_n$ pour tout entier n de $\mathbb{N}^*-\{1\}$

a) vérifier que $(\forall n\geq 2)$ $nV_n=\ln\left(\frac{n}{V_n}\right)$

b) montrer que $(\forall n\geq 2)$ $\frac{\ln n}{n}<V_n<2\frac{\ln n}{n}$ et déterminer $\lim_{n\to+\infty}V_n$ puis déduire que $\lim_{n\to+\infty}u_n=1$

6

Soit n un entier de $\mathbb{N}$ tel que $n\geq 2$. on considère la fonction $f_n(x)=-x^2+2+n\ln x$

1) calculer les limites $\lim_{x\to+\infty}f_n(x)$ et $\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}f_n(x)$

2) calculer la dérivée $f_n'(x)$ et dresser le tableau des variations de f_n

3) a) on pose $g(x)=x\ln x-x+2$

(i) calculer $g'(x)$ puis donner le tableau des variations de g

(ii) en déduire que $(\forall x\in\,]0,+\infty[)$ $g(x)>0$

b) vérifier que $f\left(\sqrt{\frac{n}{2}}\right)>0$ et prouver que l'équation $f_n(x)=0$ admet deux solutions U_n et V_n

(on prend $U_n<V_n$)

c) calculer $\lim_{n\to+\infty}V_n$ et montrer que $\lim_{n\to+\infty}\frac{\ln V_n}{\ln n}=\frac{1}{2}$

4) a) prouver que $(\forall n\geq 2)$ $U_n<1$

b) vérifier que $f_{n+1}(U_n)=\ln(U_n)$ puis déduire que $(U_n)_{n\geq 3}$ est croissante

c) déterminer $\ln U_n$ en fonction de n et U_n et montrer que $(\forall n\geq 2)$ $-\frac{2}{n}\leq\ln U_n\leq-\frac{1}{n}$

puis déterminer $\lim_{n\to+\infty}U_n$