Fonctions logarithmes

1 Le logarithme népérien

Définition :

Le logarithme népérien est la primitive de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ sur l'intervalle $]0,+\infty[$ et qui s'annule en 1. On la note ln.

Conséquences :

$\star$ Le domaine de définition de ln est $]0,+\infty[$.
$\star$ $\ln(1) = 0$.
$\star$ ln est une fonction dérivable sur $]0,+\infty[$ et on a : $\quad (\forall x \in]0,+\infty[) \;:\; \ln'(x) = \dfrac{1}{x}$
$\star$ *ln* est strictement croissante sur $]0,+\infty[$.
$\star$ Pour tous a et b de $]0,+\infty[$: $\quad a < b \Longleftrightarrow \ln(a) < \ln(b) \qquad \ln(a) = \ln(b) \Leftrightarrow a = b.$
$\star$ $\ln(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \qquad \ln(x) > 0 \Leftrightarrow x > 1 \qquad \ln(x) < 0 \Leftrightarrow 0 < x < 1.$

Une propriété fondamentale :
Pour tous a et b de $]0,+\infty[$: $\quad \ln(ab) = \ln(a) + \ln(b).$

Proposition :

Pour tous a et b de $]0,+\infty[$ et r de $\mathbb{Q}$ on a :
$\star$ $\ln(\dfrac{1}{a}) = -\ln(a) \qquad \star\ \ln(\dfrac{a}{b}) = \ln(a) - \ln(b)$
$\star$ $\ln(\sqrt{a}) = \dfrac{1}{2}\ln(a) \qquad \star\ \ln(a^r) = r\ln(a)$

Proposition :

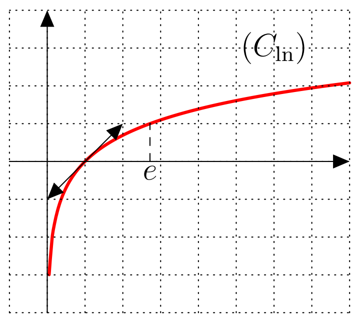
$\star$ $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty \qquad \star\ \lim\limits_{x\to0^+} \ln(x) = -\infty \qquad \star\ \lim\limits_{x\to1} \dfrac{\ln(x)}{x-1} = 1$
$\star$ $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1 \qquad \star\ \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0 \qquad \star\ \lim\limits_{x\to0^+} x.\ln(x) = 0$
$\star$ $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x^n} = 0 \qquad \star\ \lim\limits_{x\to0^+} x^n.\ln(x) = 0 \qquad (\forall n \in \mathbb{N}^*)$

Proposition :

L'équation $\ln(x) = 1$ admet une unique solution noté e telle que $e = 2,718....$

T.v et $(C_{\ln})$:

x	0	$+\infty$
$\dfrac{1}{x}$	$\Vert$	$+$
ln	$\Vert$ $-\infty$	$\nearrow$ $+\infty$



2 La dérivée logarithmique d'une fonction

Définition :

Soit u une fonction dérivable et ne s'annule jamais sur un intervalle I.
La fonction $x \mapsto \dfrac{u'(x)}{u(x)}$ s'appelle La dérivée logarithmique de u sur I.

Proposition :

Si u est une fonction dérivable sur un intervalle I telle qu'elle ne s'annule jamais sur I, alors la fonction $f : x \mapsto \ln(|u(x)|)$ est dérivable sur I et sa dérivée est La dérivée logarithmique de u.

càd
$$(\forall x \in I) \ : \ f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$$

Proposition :

Soit u une fonction dérivable et ne s'annule jamais sur un intervalle I.
Les fonctions primitives de la fonction $x \mapsto \dfrac{u'(x)}{u(x)}$ sur I sont les fonctions $x \mapsto \ln(|u(x)|) + C$ avec $C \in \mathbb{R}$.

3 Le logarithme à base a $(a > 0eta \neq 1)$

Définition :

Soit a un réel strictement positif et différent de 1.
Le logarithme à base a est la fonction noté $\log_a$ et définie sur $]0, +\infty[$ par : $\log_a(x) = \dfrac{\ln(x)}{\ln(a)}$.
Si $a = 10$ on note $\log_{10} = \log$.

Conséquences :

$\log_a(a) = 1$ $\qquad$ $\log_a(e) = \dfrac{1}{\ln(a)}$ $\qquad$ $\log_a(1) = 0$ $\qquad$ $\log_e = \ln$

Proposition :

Soient $x, y \in]0, +\infty[$ et $a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$. On a :

$$\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y) \quad ; \quad \log_a\left(\frac{1}{y}\right) = -\log_a(y)$$
$$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y) \quad ; \quad \log_a(x^r) = r\log_a(x) \ , \ (\forall r \in \mathbb{Q})$$

Proposition :

Pour tout $a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$, la fonction $\log_a$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ et on a :

$$(\forall x \in]0, +\infty[) \ : \ \log_a'(x) = \frac{1}{x\ln(a)}$$

$0 < a < 1$

x	0	$+\infty$
$\log_a'$	‖	$-$
$\log_a$	‖	$+\infty \searrow -\infty$

$a > 1$

x	0	$+\infty$
$\log_a'$	‖	$+$
$\log_a$	‖	$-\infty \nearrow +\infty$