Professeur : Derfoufi
Lycée Errazi (2022/2023)

Calcul intégral

1 L'intégrale d'une fonction continue sur un segment

Définition 1 :

Soient f une fonction continue sur un intervalle I et F sa primitive sur I, et soient a et b de I .

Le nombre $F(b)-F(a)$ s'appelle l'intégrale de f de a à b noté $\int_a^b f(x)dx$ et se lit " l'intégrale de a à b de $f(x)dx$ ".

Notation :

Le nombre $\int_a^b f(x)dx$ s'écrit aussi $[F(x)]_a^b$ et on a : $\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b)-F(a)$.

Remarque :

Dans l'écriture $\int_a^b f(x)dx$, on peut remplacer la variable x par t, s, ... donc :

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(s)ds = ...$$

Conséquences :

Si f est continue sur $[a,b]$ alors : $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$ et $\int_a^a f(x)dx = 0$.

2 Relation de Chasles - la linéarité de l'intégrale

Proposition 1 :

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle I et a,b et c de I et $k \in \mathbb{R}$.

⋆ La relaion de Chasles : $\int_a^b f(x)dx = \int_a^{c} f(x)dx + \int_{c}^b f(x)dx$.

⋆ La linéarité de l'intégrale : $\int_a^b (f+g)(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$ et $\int_a^b (kf)(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$.

3 Intégrale et ordre

Proposition 2 :

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle I et $a$et b de I tels que $a \leqslant b$.

⋆ Si f est positive sur $[a,b]$ alors : $\int_a^b f(x)dx \geqslant 0$.

⋆ Si $g(x) \leqslant f(x)$ pour tout x de $[a,b]$ alors : $\int_a^b g(x)dx \leqslant \int_a^b f(x)dx$.

⋆ $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\,dx$.

⋆ $m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)dx \leqslant M(b-a)$ avec $m = \min_{x\in[a,b]} f(x)$ et $M = \max_{x\in[a,b]} f(x)$.

4 La valeur moyenne

Proposition & Définition :

Soient f une fonction continue sur un intervalle I et $a$et b de I tels que $a < b$.

⋆ Il existe au moins un c de $[a, b]$ tel que : $f(c) = \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)dx.$

⋆ Le nombre $\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ s'appelle la valeur moyenne de f sur l'intervalle $[a, b]$.

Remarque :

$f(c) = \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ n'est que le T.A.F appliqué à F (primitive de f) exprimé à l'aide d'une intégrale.

5 Techniques de calcul intégral

1- Calcul direct : se fait par trouver une primitive de la fonction à intégrer sur l'intervalle I .

Exemples :

$\displaystyle\int_1^5 kdx = \int_1^5 (kx)'dx = [kx]_1^5 = 5k - k = 4k\,;\ \forall k \in \mathbb{R}$

$\displaystyle\int_1^e \frac{1}{x}dx = \int_1^e \ln'(x)dx = [\ln(x)]_1^e = \ln(e) - \ln(1) = 1$

2- L'intégration par partie :

Proposition & Définition :

Soient f et g deux fonctions dérivables et leurs dérivées sont continues sur un intervalle $[a, b]$. Alors on a :

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx$$

l'utilisation de cette relation s'appelle la technique d'intégration par partie.

Exemple :

$\displaystyle\int_1^e \ln(x)dx = \int_1^e (x)'\ln(x)dx = [x\ln(x)]_1^e - \int_1^e x\times\frac{1}{x}dx = e - (e-1) = 1.$

3- Changement de variables :

Proposition 3 :

Soit g une fonction dérivable sur $[a, b]$ telle que g' une continue sur $[a, b]$. Soit f une fonction continue sur $g([a, b])$. Alors :

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(t)dt.$$

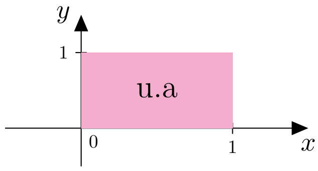
Exemple :

$$\int_1^2 \frac{\sqrt{x}}{x+1}dx \overset{t=\sqrt{x}}{=\!=} \int_{\sqrt{1}}^{\sqrt{2}} \frac{t}{t^2+1}.2tdt = 2\int_1^{\sqrt{2}} \frac{t^2}{t^2+1}dt = 2\int_1^{\sqrt{2}} \left(1 - \frac{1}{t^2+1}\right)dt = ...$$

6 Calcul des aires et volumes

1- Calcul des aires.

Le plan est rapporté à un repère orthogonal $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.
L'unité de l'aire est $u.a = ||\overrightarrow{i}|| \times ||\overrightarrow{j}||$.



Proposition 4 :

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ et (C_f) sa courbe. L'aire comprise entre (C_f) , (Ox) et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ est :

$$\mathscr{A}(f, a, b) = \left(\int_a^b |f(x)|dx\right) u.a.$$

Remarque :

(1) Si f est positive sur $[a, b]$, alors $\mathscr{A}(f, a, b) = \left(\int_a^b f(x)dx\right) u.a.$

(2) Si f est négative sur $[a, b]$, alors $\mathscr{A}(f, a, b) = -\left(\int_a^b f(x)dx\right) u.a.$

(3) Si f change de signe sur $[a, b]$, alors on utilise la relation de Chasles pour calculer $\mathscr{A}(f, a, b)$.

Proposition 5 :

Soient f et g deux fonctions continues sur $[a, b]$ et (C_f) et (C_g) leurs courbes. L'aire comprise entre (C_f) , (C_g) et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ est :

$$\mathscr{A}(f, g, a, b) = \left(\int_a^b |f(x) - g(x)|dx\right) u.a$$

2- Calcul des volumes.

L'espace est muni d'un repère orthogonal $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$.
L'unité de volume est $u.v = ||\overrightarrow{i}|| \times ||\overrightarrow{j}|| \times ||\overrightarrow{k}||$.

Proposition 6 :

Soient un solide compris entre deux plans paralèlles d'équations $z = a$ et $z = b$.
On note par $S(t)$ l'aire d'ensemble des points $M(x, y, z)$ tels que $z = t$ (la section du solide par dans le plan d'équation $z = t$).
Si la fonction $t \mapsto S(t)$ est continue sur l'intervalle $[a; b]$, alors le volume V du solide , en u.v. est donné par :

$$V = \int_a^b S(t)dt.$$

Proposition 7 :

Soit f une fonction continue et positive sur $[a; b]$, et (C_f) sa courbe représentative dans le repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.On note D le domaine limité par (C_f), l'axe (Ox) et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$. Alors le volume V du solide de révolution engendré par la rotation de D autour de l'axe (Ox) est

$$V = \pi \left(\int_a^b (f(t))^2 dt\right) u.v.$$

$\boxed{7}$ Calcul de quelques limites des suites à l'aide d'une intégrale

Théorème :

Soit f une fonction continue sur $[a,b]$. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$s_n = \frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f\left(a + i\frac{b-a}{n}\right) \quad \text{et} \quad S_n = \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(a + i\frac{b-a}{n}\right).$$

Si f est strictement monotone sur $[a;b]$ ou f est dérivable et f' est bornée $[a;b]$, alors les suites (s_n) et (S_n) convergent et admettent $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ comme limite commune.

Exemple :

Soit $(u_n)_{n>0}$ la suite définie par : $u_n = \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + ... + \dfrac{1}{2n}$. On a :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1-0}{n}\sum_{i=1}^{i=n} f\left(0 + i\frac{1-0}{n}\right) = \int_0^1 f(t)dt = \ln(2),$$

avec $f : t \mapsto \dfrac{1}{1+t}$ qu'est strictement décroissante sur $[0;1]$.