Calcul intégrale

1

Calculer les intégrales suivantes

$I_3 = \int_0^4 x\sqrt{2x+1}\,dx$	$I_2 = \int_1^e \frac{1}{x(2+\ln x)^3}\,dx$	$I_1 = \int_0^{\sqrt[3]{5}} \frac{x^2}{\sqrt{x^3+4}}\,dx$
$I_6 = \int_0^1 \frac{\sqrt{\arctan x}}{1+x^2}\,dx$	$I_5 = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{1-\sin^2 x}\,dx$	$I_4 = \int_0^2 \frac{2x}{x+2}\,dx$

2

A l'aide d'une intégration par parties calculer :

$J_3 = \int_0^2 (x-1)e^{2x}\,dx$	$J_2 = \int_0^1 x\ln(2x+1)\,dx$	$J_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2x-3)\cos x\,dx$
$J_6 = \int_0^1 x^3 e^{-x^2}\,dx$	$J_5 = \int_0^{\sqrt{3}} x^3\sqrt{x^2+1}\,dx$	$J_4 = \int_0^1 x^3 \arctan x\,dx$

3

A l'aide d'une intégration par changement de variable calculer :

$K_3 = \int_0^1 \frac{\ln(1+e^t)}{1+e^{-t}}\,dt$ ضع $x = 1+e^t$	$K_2 = \int_1^2 \frac{1}{x+2\sqrt{x-1}}\,dx$ ضع $t = \sqrt{x-1}$	$K_1 = \int_{\sqrt{3}}^{2\sqrt{2}} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}-1}\,dx$. ضع $t = \sqrt{x^2+1}$
$K_6 = \int_0^{\ln 2} \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$ ضع $x = \frac{e^t - e^{-t}}{2}$	$K_5 = \int_{\sqrt{2}}^2 \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\,dx$ ضع $t = \sqrt{x^2-1}$	$K_4 = \int_{\ln 2}^{\ln 4} \frac{1}{\sqrt{e^x-1}}\,dx$ ضع $t = \sqrt{e^x-1}$

4

Soit f une fonction continue sur $[a,b]$ telle que : $(\forall x \in [a,b])\quad f(a+b-x) = f(x)$

1) montrer que $\int_a^b xf(x)\,dx = \frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)\,dx$

2) déduire la valeur de $I = \int_0^{\pi} x\sin x\,dx$

5

Montrer que $\frac{1}{2} \le \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \le \frac{\sqrt{3}}{2}$ ، $\frac{1}{2} \le \int_0^1 \frac{1}{1+x^4}\,dx \le 1$

$\frac{1}{1+\pi^2} \le \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\sin x}{1+x^2}\,dx \le \frac{4}{4+\pi^2}$ ، $\frac{\pi}{4} \le \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos t}\,dt \le \frac{\pi\sqrt{2}}{4}$

6

On pose $J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-nx}\cos x\,dx$; $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-nx}\sin x\,dx$ pour tout entier naturel n

1) calculer I_0 , J_0

2) montrer que $I_n + nJ_n = 1$ et $J_n - nI_n = e^{-\frac{n\pi}{2}}$ puis déduire J_n , I_n

Calcul intégrale

7

On considère les intégrales :

$$I=\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} \quad ; \quad J=\int_0^1 \frac{dx}{\left(1+x^2\right)^2} \quad ; \quad K=\int_0^1 \frac{1-x^2}{\left(1+x^2\right)^2}dx \quad \text{et} \quad L=\int_{-2}^{-1} \frac{1+x}{\left(x^2+4x+5\right)^2}dx$$

1) calculer I

2) A l'aide d'une intégration par parties montrer que $2J=I+\frac{1}{2}$ en déduire J

3) a) Montrer que $K=-I+2J$ et déduire K

b) Poser $t=\arctan x$ et calculer K

4) En posant $t=x+2$ déterminer L

8

Pour tout entier n de $\mathbb{N}^*$ on pose $I_0=\int_1^e x\,dx$ et $I_n=\int_1^e x(\ln x)^n\,dx$

1) calculer I_1 , I_0

2) a) montrer que $\left(\forall n\in\mathbb{N}^*\right)\ 2I_{n+1}=e^2-\left(n+1\right)I_n$

b) en déduire la valeur de I_2

3) a) montrer que $\left(\forall n\in\mathbb{N}^*\right)\ I_{n+1}\leq I_n$

b) en déduire que $\left(\forall n\in\mathbb{N}^*\right)\ \frac{e^2}{n+3}\leq I_n\leq\frac{e^2}{n+2}$ et déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$; $\lim\limits_{n\to+\infty} nI_n$

9

1) soit f la fonction définie par : $f\left(x\right)=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$

calculer la dérivée $f'\left(x\right)$ et déduire la valeur de $A=\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$

2) on considère les intégrales $B=\int_0^1 \sqrt{x^2+1}\,dx$ et $C=\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}dx$

a) en utilisant une intégration par parties exprimer B en fonction de A

b) montrer que $A+C=B$ déduire C ; B

10

déterminer la limite de chacune des suites suivantes :

$$U_n=\frac{1}{n\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{k=n}\sqrt{k}\quad(3)\qquad U_n=\sum_{k=1}^{k=n}\frac{n}{n^2+k^2}\quad(2)\qquad U_n=\sum_{k=1}^{k=n}\frac{1}{\sqrt{n^2+nk}}\quad(1)$$

$$U_n=\sum_{k=1}^{k=n}\frac{1}{\sqrt{n\left(2n-k\right)}}\quad(6)\qquad U_n=\sum_{k=1}^{k=n}\frac{\sqrt[n]{2}^{\,k}}{n}\quad(5)\qquad U_n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{k=n}\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)\quad(4)$$

$$U_n=\sum_{k=1}^{k=n}\frac{1}{n+k}\quad(7)\qquad U_n=\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{k=n}\left(1+\frac{k}{n}\right)}\quad(8)\qquad U_n=\frac{1}{\left(n+1\right)^4}\sum_{k=1}^{k=n}k^3\quad(9)$$