| Lycée Technique Er-razi<br>Prof : M. DERFOUFI | Continuité-Fonctions réciproques<br>2019/2020 | 2ème année baccalaureat<br>Sciences Mathématiques |
|---|---|---|

**Rappel :**

Si $\begin{cases} f \text{ est continue sur un intervalle } I \\ f \text{ est strict}-\text{monotone sur } I \\ f(I)=J \end{cases}$

**Alors $f$ est bijective de $I$ vers $J$**

**et $f$ admet une fonction réciproque $J \xrightarrow{f^{-1}} I$ telle que :**

$$(\forall x\in f(I))(\forall y\in I): f^{-1}(x)=y \Leftrightarrow f(y)=x$$

**Propriétés:**

- **$f^{-1}$ est définie, continue et stric − monotone sur $J=f(I)$ et les courbes $(C_f)$ et $(C_{f^{-1}})$ sont symétriques par rapport à l'axe $(\Delta)_{y=x}$ dans un repére orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.**
- $\forall x\in I$: $f^{-1}(f(x))=x$
- $\forall x\in f(I)$: $f(f^{-1}(x))=x$
- **$f^{-1}$ est impaire si $f$ est impaire.**

**Exercice 1 :**

Soit $f$ la fonction définie par : $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x}}$

1) Montrer que $f$ est bijective de $I=]-1;+\infty[$ vers un intervalle $J$ à déterminer .

2) Donner le tableau de variation de $f^{-1}$ .

3) Calculer $f^{-1}(x)$ pour tout $x$ de $J$.

**Exercice 2 :**

Soit $f$ la fonction définie par :

$$f(x)=\sqrt{1+x}-\sqrt{x-1}$$

1) Déterminer $D_f$ Puis calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

2) Montrer que $f$ est bijective de $D_f$ vers un intervalle $J$ à déterminer.

3) Donner le tableau de variation de $f^{-1}$ .

4) Calculer $f^{-1}(x)$ pour tout $x$ de $J$.

**Exercice 3 :**

Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=Arctan\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)$$

1) Montrer que : $\forall x\in\mathbb{R}:\ 0\prec f(x)\prec \dfrac{\pi}{2}$ .

2) a- Vérifier que :

$$(\forall x\in\mathbb{R}):\ 1-tan^2(f(x))=2x\,tan(f(x))$$

b- En déduire que :

$$(\forall x\in\mathbb{R}):\ x=tan\left(\frac{\pi}{2}-2f(x)\right)$$

c- Conclure que : $\forall x\in\mathbb{R}: f(x)=\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{Arctan(x)}{2}$

3) En déduire que $f$ est bijective de $\mathbb{R}$ vers un intervalle $J$ à déterminer et calculer $f^{-1}(x)$ pour tout $x$ de $J$ .

**Exercice 4 :**

Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=Arctan\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)$$

1) Montrer que :

$$(\forall x\in\mathbb{R})\left(\exists!\alpha\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right[\right): x^2=tan(\alpha)$$

2) En déduire que :

$$\forall x\in\mathbb{R}:\quad f(x)=\frac{\pi}{4}-Arctan\left(x^2\right)$$

**Exercice 5 :**

Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$f(x)=\frac{\pi}{2}-Arctan\left(\frac{x^2-1}{2x}\right)$$

1) Montrer que :

$$(\forall x\in I=[1;+\infty[):\quad f(x)=\pi-2Arctan(x)$$

2) En déduire que $f$ est bijective de $I=[1;+\infty[$ vers un intervalle $J$ à déterminer .

3) Calculer $f^{-1}(x)$ pour tout $x$ de $J$.

**Exercice 6 :**

Soit $f$ la fonction définie par :

$$f(x)=Arctan\left(\frac{2x}{1-x^2}\right)$$

1) déterminer $D_f$ puis étudier la parité.

2) Calculer : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ; $\lim\limits_{x\to1^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to1^-} f(x)$

3) soit $x\in[0;1[\cup]1;+\infty[$ ; en posant $y=Arctan(x)$

Monter que $\begin{cases} Si\ \ 0\le x\prec 1\ Alors\quad f(x)=2Arctan(x) \\ Si\ \ x\succ 1\ Alors\quad f(x)=2Arctan(x)-\pi \end{cases}$

4) a- Montrer que $g$ la restriction de $f$ sur $I=]1;+\infty[$ est bijective de $I$ vers un intervalle $J$ à déterminer .

b- Donner le tableau de variation de $g^{-1}$

c- Calculer $g^{-1}(x)$ pour tout $x$ de $J$.